***Лекция 15***

**Вынужденные колебания без сопротивления системы с двумя степенями свободы**

 Пусть, к консервативной системе приложены вынуждающие силы, которые приводятся к двум обобщенным вынуждающим силам $Q\_{1}(t)$ и $Q\_{2}(t)$ . Тогда дифференциальные уравнения движения системы станут неоднородными

$a\_{11}\ddot{q}\_{1}+a\_{12}\ddot{q}\_{2}+c\_{11}q\_{1}+c\_{12}q\_{2}=Q\_{1}(t)$

$a\_{21}\ddot{q}\_{1}+a\_{22}\ddot{q}\_{2}+c\_{21}q\_{1}+c\_{22}q\_{2}=Q\_{2}(t)$

Решение этих уравнений складывается, как обычно, из общего решения однородного уравнения (незатухающие колебания с собственными частотами k1 и k2 ) и вынужденных колебаний.

 Как было сказано, всегда можно от координат $q\_{1} q\_{2}$ перейти к нормальным координатам θ1 θ2, в которых дифференциальные уравнения разделяются. Пусть вынуждающие силы гармонические, тогда

$a\_{11}\ddot{θ}\_{1}+c\_{11}θ\_{1}=H\_{1}Sin(pt+δ)$

$a\_{22}\ddot{θ}\_{2}+c\_{22}θ\_{2}=H\_{2}Sin(pt+δ)$

Из этих уравнений видно, что система имеет два резонанса при совпадении каждой из собственных частот с вынуждающей частотой р.

***Пример*** (динамический гаситель колебаний).

 На Рис.1 изображена схема машины массы М на упругом основании жесткости с1.

К машине приложена периодическая вынуждающая сила H Sin($ω$t+$ δ)$, которая может возникнуть, например, от неуравновешенности двигателя машины, вращающегося с угловой скоростью ω.

HSin(pt+$ δ)$

Рис.1

с1

Mg

 Очевидно, что машина будет совершать нежелательные вынужденные колебания, особенно опасные вблизи резонанса ω→k.

 Покажем, как с помощью динамического гасителя колебаний избавить машину от вынужденных колебаний. Динамический гаситель колебаний представляет собой тело массы m, установленное на пружине жесткости c2 на машине (Рис.2).

 Найдем квадратичные формы кинетической и потенциальной энергий. За обобщенные координаты выберем абсолютные координаты z1 z2, начало которых выбрано в положении равновесия масс.

$П=-mz\_{2}-Mz\_{1}+\frac{c\_{1}}{2}\left[\left(Δ\_{ст1}+z\_{1}\right)^{2}-Δ\_{ст1}^{2}\right]+\frac{c\_{2}}{2}\left[\left(Δ\_{ст2}+z\_{2}-z\_{1}\right)^{2}-Δ\_{ст2}^{2}\right]=\frac{1}{2}\left(с\_{11}z\_{1}^{2}+2с\_{12}z\_{1}z\_{2}+с\_{22}z\_{2}^{2}\right)$

HSin(pt+$ δ)$

Рис.2

с1

Mg

с2

mg

z

Отсюда

$$с\_{11}=c\_{1}+c\_{2} с\_{12}=-c\_{2} с\_{22}= c\_{2}$$

$$T=\frac{1}{2}M\dot{z}\_{1}^{2}+\frac{1}{2}m\dot{z}\_{2}^{2}=\frac{1}{2}(a\_{11}\dot{z}\_{1}^{2}+2a\_{12}\dot{z}\_{1}\dot{z}\_{2}+a\_{22}\dot{z}\_{2}^{2})$$

Отсюда

$$a\_{11}=M a\_{12}=0 a\_{22}=m $$

Подставив формы в уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения движения

$$M\ddot{z}\_{1}+\left(c\_{1}+c\_{2}\right)z\_{1}-c\_{2}z\_{2}=H Sin(ωt+ δ)$$

$m\ddot{z}\_{2}-c\_{2}z\_{1}+c\_{2}z\_{2}=0$

Решение ищем в виде правой части.

$$z\_{1}=ASin\left(ωt+ δ\right) z\_{2}=BSin\left(ωt+ δ\right)$$

Подставив решения в уравнения, после сокращения на $Sin\left(ωt+ δ\right)$получим алгебраическую систему для определения амплитуд вынужденных колебаний А и В.

$$\left(c\_{1}+c\_{2}-ω^{2}M\right)A-c\_{2}B=H$$

$$-c\_{2}A+\left(c\_{2}-ω^{2}m\right)B=0$$

Определитель матрицы системы

$$Δ=\left(c\_{1}+c\_{2}-ω^{2}M\right)\left(c\_{2}-ω^{2}m\right)- c\_{2}^{2}$$

Решения системы

$$A=\frac{H\left(c\_{2}-ω^{2}m\right)}{Δ} B=\frac{Hc\_{2}}{Δ}$$

Отсюда вытекает, что можно подобрать массу $m динамического гасителя$и жесткость его пружины таким образом, что

$$c\_{2}=ω^{2}m$$

то амплитуда вынужденных колебаний машины А будет равно нулю.

$$Δ=- c\_{2}^{2}$$

$$A=0 B=-\frac{H}{c\_{2}} $$

Видно, что гаситель действует на машину с силой $Bc\_{2}Sin\left(ωt+ δ\right)=-HSin(ωt+ δ)$, уравновешивающую в каждый момент вынуждающую силу, вся энергия которой идет на раскачивание гасителя.

 Массу гасителя естественно выбрать небольшой $m\ll M$, но тогда и жесткость его пружины должна быть маленькой. Это, однако, приведет к большой амплитуде колебаний самого гасителя. Поэтому выбор конкретных параметров гасителя является результатом компромисса между весом и амплитудой гасителя.